MATEMATIKA II - 2.test GRUPA A1 04.04.2006.

1. Odredite $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ako je $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; x \in [1,4] \\ 0 & ; x \notin [1,4] \end{cases}$.
   Rješenje: Za $x \le 1$ je $F(x) = \int_0^x 0dt = 0$. Za $1 < x \le 4$ je $F(x) = \int_0^1 0dt + \int_1^x (t-1)dt = \frac{1}{2}(x-1)^2$. Za $4 < x$ je $F(x) = \int_0^1 0dt + \int_1^4 (t-1)dt + \int_4^x 0dt = \frac{9}{2}$. $\square$

2. Izračunajte približnu vrijednost od $\int_1^4 x^3\, dx$ koristeći ekvidistantnu subdiviziju sa $n = 3$ pri čemu za međutočke uzmite lijeve rubove podintervala.
   Rješenje: Kako je $\frac{b-a}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$ to je $x_i - x_{i-1} = 1$. Tražena subdivizija glasi
   $$x_0 = 1 < x_1 = 2 < x_2 = 3 < x_3 = 4.$$
   Kako su izabrani lijevi rubovi podintervala to je $\bar{x}_i = x_{i-1}$. Sada je
   $$\int_1^4 x^3 dx \approx \sum_{i=1}^{3} \bar{x}_i^3 (x_i - x_{i-1}) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 36.$$
   Primjetite da je $\int_1^4 x^3 dx = 63.75 > 36$. Zašto je aproksimacija tako "loša"? $\square$

3. Supstitucijom $x = t^2$ u određenom integralu $\int_4^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+3\sqrt{x})}$ izračunajte ga na pet decimalnih mjesta.
   Rješenje:
   $$\int_4^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+3\sqrt{x})} = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \in [2, \sqrt{10}\,] \end{array} \right\}$$
   $$= \int_2^{\sqrt{10}} \frac{2tdt}{t(1+3t)} = \frac{2}{3} \ln \frac{1+3\sqrt{10}}{7} = 0.269474.$$
   $\square$

MATEMATIKA II - 2.test GRUPA B1 04.04.2006.

1. Izračunajte približnu vrijednost od $\int_2^5 x^2\, dx$ koristeći ekvidistantnu subdiviziju sa $n = 3$ pri čemu za međutočke uzmite desne rubove podintervala.
   Rješenje: Kako je $\frac{b-a}{3} = \frac{5-2}{3} = 1$ to je $x_i - x_{i-1} = 1$. Tražena subdivizija glasi
   $$x_0 = 2 < x_1 = 3 < x_2 = 4 < x_3 = 5.$$
   Kako su izabrani desni rubovi podintervala to je $\bar{x}_i = x_i$. Sada je
   $$\int_2^5 x^2 dx \approx \sum_{i=1}^{3} \bar{x}_i^3 (x_i - x_{i-1}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 50.$$
   Primjetite da je $\int_2^5 x^2 dx = 39 < 50$. Zašto je aproksimacija tako "loša"? $\square$

2. Supstitucijom $x = t^2$ u određenom integralu $\int_{10}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})}$ izračunajte ga na pet decimalnih mjesta.
Rješenje:

$$\int_{10}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})} = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \in [\sqrt{10}, 4] \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\sqrt{10}}^{4} \frac{2tdt}{t(1+2t)} = \ln \frac{9}{1+2\sqrt{10}} = 0.205992.$$

□

3. Odredite $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ako je $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x-2 & ; x \in [2,5] \\ 0 & ; x \notin [2,5] \end{array} \right.$.
Rješenje: Za $x \leq 2$ je $F(x) = 0$. Za $2 < x \leq 5$ je $F(x) = \frac{(x-2)^2}{2}$. Za $x > 5$ je $F(x) = \frac{9}{2}$. □

MATEMATIKA II - 2.test GRUPA A2 05.04.2006.

1. Koristeći integralni teorem srednje vrijednosti procijenite $\int_0^2 e^{1-x^2} dx$.
Rješenje: Za $f(x) = e^{1-x^2}$ je $f'(x) = -2xe^{1-x^2} \leq 0$ za $x \in [0,2]$, što daje da je f padajuća funkcija na $[0,2]$. Odavde je $m = \min\{f(x); x \in [0,2]\} = f(2) = e^{-3}$, $M = \max\{f(x); x \in [0,2]\} = f(0) = e$. Iz integralnog teorema srednje vrijednosti slijedi:

$$2e^{-3} \leq \int_0^2 e^{1-x^2} dx \leq 2e.$$

□

2. Supstitucijom $x = \frac{1}{t}$ u određenom integralu $\int_{1/\sqrt{2}}^{10^3} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$ izračunajte ga na 5 decimalnih mjesta.
Rješenje:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{10^3} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2} \\ t = \frac{1}{x} \in [\sqrt{2}, 10^{-3}] \end{array} \right\} = \int_{\sqrt{2}}^{10^{-3}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{4}{t^2}-1}}$$

$$= \int_{10^{-3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin \frac{t}{2}\Big|_{10^{-3}}^{\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin \frac{10^{-3}}{2} = \pi/4 - 0.0005 = 0.784898.$$

□

3. Izračunajte $\int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx$.
Rješenje:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(2x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos(2x)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx = \frac{\pi}{4} = 0.785398.$$

□

MATEMATIKA II - 2.test GRUPA B2 05.04.2006.

1. Koristeći integralni teorem srednje vrijednosti procijenite $\int_0^3 e^{x^2-1}dx$.
Rješenje: Za $f(x) = e^{x^2-1}$ je $f'(x) = 2xe^{x^2-1} \geq 0$ za $x \in [0,3]$, što daje da je f rastuća funkcija na $[0,3]$. Odavde je $m = \min\{f(x); x \in [0,3]\} = f(0) = e^{-1}$, $M = \max\{f(x); x \in [0,3]\} = f(3) = e^8$. Iz integralnog teorema srednje vrijednosti slijedi:
$$3e^{-1} \leq \int_0^3 e^{x^2-1}dx \leq 3e^8.$$
$\square$

2. Supstitucijom $x = \frac{1}{t}$ u određenom integralu $\int_{\sqrt{2}/3}^{10^4} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$ izračunajte ga na 5 decimalnih mjesta.
Rješenje:
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{10^4} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2} \\ t = \frac{1}{x} \in [\frac{3}{\sqrt{2}}, 10^{-4}] \end{array} \right\} = \int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{10^{-4}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{9}{t^2}-1}}$$
$$= \int_{10^{-4}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}\Big|_{10^{-4}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{10^{-4}}{2} = \pi/4 - 0.00005 = 0.785348.$$
$\square$

3. Izračunajte $\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)dx$.
Rješenje:
$$\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(2x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin(2x) \end{array} \right\}$$
$$= \frac{1}{2}x\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}.$$
$\square$

MATEMATIKA II - 2.test GRUPA A3 06.04.2006.

1. Odredite stacionarne točke funkcije $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{(t-1)\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$.
Rješenje: Iz formule za deriviranje integrala sa promjenjivim granicama se dobije $F'(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^4}}2x$ što izjednačavanjem sa 0 daje stacionarne točke $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. $\square$

2. Supstitucijom $x = 2\sin t$ u određenom integralu $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ izračunajte ga na pet decimalnih mjesta.
Rješenje:
$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt \\ t = \arcsin\frac{x}{2} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t}$$
$$= \frac{1}{4}(-\operatorname{ctg} t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0.288675.$$
$\square$

3. Izračunajte $\int_{1/2}^{e/2} \ln(2x)dx$.
Rješenje:

$$\int_{1/2}^{e/2} \ln(2x)dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \ln(2x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right\} = x\ln(2x)\Big|_{1/2}^{e/2} - \int_{1/2}^{e/2} dx = \frac{1}{2}.$$

$\square$

MATEMATIKA II - 2.test GRUPA B3 06.04.2006.

1. Supstitucijom $x = 4\cos t$ u određenom integralu $\int_0^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$ izračunajte ga na pet decimalnih mjesta.
Rješenje:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = 4\cos t \Rightarrow dx = -4\sin t dt \\ t = \arccos\frac{x}{4} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}] \end{array} \right\} = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{8}\,\mathrm{tg}\, t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = +\infty.$$

$\square$

2. Izračunajte $\int_{1/3}^{e/3} \ln(3x)dx$.
Rješenje:

$$\int_{1/3}^{e/3} \ln(3x)dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \ln(3x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right\} = x\ln(3x)\Big|_{1/3}^{e/3} - \int_{1/3}^{e/3} dx = \frac{1}{3}.$$

$\square$

3. Odredite stacionarne točke funkcije $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{(t-4)\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$.
Rješenje: Iz formule za deriviranje integrala sa promjenjivim granicama se dobije $F'(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{1+x^4}}2x$ što izjednačavanjem sa 0 daje stacionarne točke $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. $\square$

MATEMATIKA II - 2.test GRUPA A4 07.04.2006.

1. Supstitucijom $x = 2\,\mathrm{tg}\, t$ u određenom integralu $\int_{2\sqrt{3}}^{10^4} \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ izračunajte ga na 5 decimalnih mjesta.
Rješenje:

$$\int_{2\sqrt{3}}^{10^4} \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \left\{ \begin{array}{c} x = 2\,\mathrm{tg}\, t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \\ t = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} \in [\frac{\pi}{3}, \mathrm{arctg}\,\frac{10^4}{2}] \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\mathrm{arctg}\,\frac{10^4}{2}} \cos t\; dt$$

$$= \frac{1}{4}[\sin \mathrm{arctg}\,\frac{10^4}{2} - \sin\frac{\pi}{3}] = 0.133975.$$

$\square$

2. Odredite za koje $x \in \mathbf{R}$ je funkcija $F(x) = \int_x^{2-x^2} e^{-t^2} dt$ strogo pozitivna, za koje strogo negativna, a za koje jednaka 0.
Rješenje: Kako je podintegralna funkcija strogo pozitivna to će i $F(x)$ biti strogo pozitivna ako je $x < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 1\rangle$. Iz istih razloga će $F(x)$ biti strogo negativna ako je $x > 2 - x^2 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$. Funkcija $F(x)$ je jednaka 0 samo ako je donja granica jednaka gornjoj granici a to je za $x = -2$ ili za $x = 1$. $\Box$

3. Izračunajte $\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}\, dx$ na 5 decimalnih mjesta.
Rješenje:

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+2)^{\frac{1}{2}} d(x^2+2) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) = 3.95617.$$

$\Box$

MATEMATIKA II - 2.test GRUPA B4 07.04.2006.

1. Odredite za koje $x \in \mathbf{R}$ je funkcija $\int_x^{x^2-6} \sqrt{1+t^2} dt$ strogo pozitivna, za koje strogo negativna, a za koje jednaka 0.
Rješenje: Kako je podintegralna funkcija strogo pozitivna to će i $F(x)$ biti strogo pozitivna ako je $x < x^2 - 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$. Iz istih razloga će $F(x)$ biti strogo negativna ako je $x > x^2 - 6 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 3\rangle$. Funkcija $F(x)$ je jednaka 0 samo ako je donja granica jednaka gornjoj granici a to je za $x = -2$ ili za $x = 3$. $\Box$

2. Izračunajte $\int_2^4 x\sqrt{x^2-4}\, dx$ na 5 decimalnih mjesta.
Rješenje:

$$\int_2^4 x\sqrt{x^2-4}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^4 (x^2-4)^{\frac{1}{2}} d(x^2-4) = \frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^4 = \frac{1}{3}12\sqrt{12} = 8\sqrt{3} = 13.8564.$$

$\Box$

3. Supstitucijom $x = 3\,\mathrm{tg}\, t$ u određenom integralu $\int_{3\sqrt{3}}^{10^5} \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ izračunajte ga na 5 decimalnih mjesta.
Rješenje:

$$\int_{3\sqrt{3}}^{10^5} \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \left\{ \begin{array}{c} x = 3\,\mathrm{tg}\, t \Rightarrow dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \\ t = \mathrm{arctg}\, \frac{x}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \mathrm{arctg}\, \frac{10^5}{3}] \end{array} \right\} = \frac{1}{9}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\mathrm{arctg}\, \frac{10^5}{3}} \cos t\; dt$$

$$= \frac{1}{9}[\sin \mathrm{arctg}\, \frac{10^5}{3} - \sin\frac{\pi}{3}] = 0.0148861.$$

$\Box$