MATEMATIKA II: 5. test Grupa **A1** 20.06. 2006.

1. Po definiciji parcijalne derivacije odredite $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ ako je $f(x,y) = \frac{2x+y}{x-y}$.
Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x, 2) - f(1,2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2(1+\Delta x)+2}{1+\Delta x - 2} - \frac{4}{-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2\Delta x + 4}{\Delta x - 1} + 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x}{\Delta x(\Delta x - 1)} = -6.$$

Provjerite dobiveni rezultat "tabličnim" deriviranjem! Geometrijska interpretracija dobivenog rezultata tj. koji kut tangenta na krivulju u prostoru dobivenu presjekom plohe $z = \frac{2x+y}{x-y}$ i ravnine $y = 2$ zatvara sa pozitivnim smjerom osi apscisa? □

2. Odredite stacionarne točke i lokalne ekstreme funkcije $z(x,y) = x^4 - y^2 + 4x + 1$.
Rješenje: Odredimo stacionarne točke zadane funkcije: Kako je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 4, \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,$$

stacionarne točke ćemo dobiti rješavanjem sustava

$$4x^3 + 4 = 0, \;\; -2y = 0.$$

Neposredno se vidi da je stacionarna točka $T(-1,0)$.
Dovoljni uvjeti: Provjerimo je li dobivena stacionarna točka i lokalni ekstrem. Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2, \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

to je vrijednost Hessiana u stacionarnoj točki:

$$D(-1,0) = 12(-1)^2 \cdot (-2) - 0 = -24 < 0,$$

odakle zaključujemo da dobivena stacionarna točka nije lokalni ekstrem već sedlasta točka. □

MATEMATIKA II: 5. test Grupa **B1** 20.06. 2006.

1. Po definiciji parcijalne derivacije odredite $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$ ako je $f(x,y)=\frac{x+2y}{x-y}$.
Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{2+2(3+\Delta y)}{2-(3+\Delta y)}-\frac{8}{-1}}{\Delta y\to 0}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{8+2\Delta y}{-1-\Delta y}+8}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-6\Delta y}{\Delta y(-1-\Delta y)}=6.$$

Provjerite dobiveni rezultat "tabličnim" deriviranjem! Geometrijska interpretracija dobivenog rezultata tj. koji kut tangenta na krivulju u prostoru dobivenu presjekom plohe $z=\frac{x+2y}{x-y}$ i ravnine $x=2$ zatvara sa pozitivnim smjerom osi ordinata? □

2. Odredite stacionarne točke i lokalne ekstreme funkcije $z(x,y)=-x^2+y^4+4y+3$.
Rješenje: Odredimo stacionarne točke zadane funkcije: Kako je

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3+4,$$

stacionarne točke ćemo dobiti rješavanjem sustava

$$4y^3+4=0,\ \ -2x=0.$$

Neposredno se vidi da je stacionarna točka $T(0,-1)$.
Dovoljni uvjeti: Provjerimo je li dobivena stacionarna točka i lokalni ekstrem. Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2,\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2,$$

to je vrijednost Hessiana u stacionarnoj točki:

$$D(-1,0)=(-2)\cdot 12(-1)^2-0=-24<0,$$

odakle zaključujemo da dobivena stacionarna točka nije lokalni ekstrem već sedlasta točka. □

MATEMATIKA II: 5. test Grupa **A2** 20.06. 2006.

1. Izračunajte $|\Delta f(1,2)-df(1,2)|$ za $f(x,y)=xy$ i $\Delta x=0.3$, $\Delta y=0.4$.
Rješenje: Po definiciji totalnog prirasta funkcije dvije varijable imamo:

$$\Delta f(1,2)=f(1+\Delta x,2+\Delta y)-f(1,2)=(1+\Delta x)(2+\Delta y)-2=$$

$$=2\Delta x+\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

Po definiciji prvog diferencijala funkcije dvije varijable imamo:

$$df(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\Delta y = 2\Delta x + \Delta y.$$

Konačno:

$$|\Delta f(1,2) - df(1,2)| = |\Delta x \Delta y| = 0.12.$$

Primjetite da se linearni dio totalnog prirasta pokratio sa prvim diferencijalom. Uvjerite se u ovom primjeru da je

$$\Delta f(x_0, y_0) - df(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0).$$

$\square$

2. Provjerite jednakost iz Schwarzovog teorema za funkciju $f(x,y) = \ln(1 + 3x + y^2)$.
Rješenje: Trebamo provjeriti jednakost

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{1 + 3x + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1 + 3x + y^2},$$

to je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{0 - 3 \cdot 2y}{(1 + 3x + y^2)^2} = \frac{-6y}{(1 + 3x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{0 - 2y \cdot 3}{(1 + 3x + y^2)^2} = \frac{-6y}{(1 + 3x + y^2)^2},$$

čime je tražena jednakost provjerena. $\square$

MATEMATIKA II: 5.test Grupa **B2** 20.06. 2006.

1. Izračunajte $|\Delta z(2,1) - dz(2,1)|$ za $z(x,y) = xy$ i $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = 0.3$.
Rješenje: Po definiciji totalnog prirasta funkcije dvije varijable imamo:

$$\Delta z(2,1) = z(2 + \Delta x, 1 + \Delta y) - z(2,1) = (2 + \Delta x)(1 + \Delta y) - 2 =$$

$$= \Delta x + 2\Delta y + \Delta x \Delta y.$$

Po definiciji prvog diferencijala funkcije dvije varijable imamo:

$$dz(1,2) = \frac{\partial z}{\partial x}(2,1)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(2,1)\Delta y = \Delta x + 2\Delta y.$$

Konačno:
$$|\Delta z(2,1) - dz(2,1)| = |\Delta x \Delta y| = 0.06.$$
Primjetite da se linearni dio totalnog prirasta pokratio sa prvim diferencijalom. Uvjerite se u ovom primjeru da je
$$\Delta z(x_0, y_0) - dz(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} d^2 z(x_0, y_0).$$
□

2. Provjerite jednakost iz Schwarzovog teorema za funkciju $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + 3y)$.
Rješenje: Trebamo provjeriti jednakost
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$
Kako je
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + 3y}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{1 + x^2 + 3y},$$
to je
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{0 - 2x \cdot 3}{(1 + x^2 + 3y)^2} = \frac{-6x}{(1 + x^2 + 3y)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{0 - 3 \cdot 2x}{(1 + x^2 + 3y)^2} = \frac{-6x}{(1 + x^2 + 3y)^2},$$
čime je tražena jednakost provjerena. □

MATEMATIKA II: 5. test Grupa **A3** 21.06. 2006.

1. Odredite vrijednost svih parcijalnih derivacija trećeg reda u $O(0,0)$ funkcije $z(x,y) = x^2 y + e^{-3y}$.
Rješenje: Trebamo naći
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$
Imamo:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 3e^{-3y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9e^{-3y}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -27e^{-3y}.$$

Sada je

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(0,0) = 0, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}(0,0) = 2, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}(0,0) = 0, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(0,0) = -27.$$

□

2. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$ ako je $z = z(x,y)$ zadano implicite sa $z^3+3xz+y^2 = 0$.
Rješenje: Derivirajući izraz $z^3 + 3xz + y^2 = 0$ parcijalno po varijabli x i uvažavajući da je $z = z(x,y)$ dobije se:

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3z + 3x \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3z}{3z^2 + 3x} = -\frac{z}{z^2 + x}.$$

Isti izraz bi naravno dobili da smo koristili formulu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

gdje je $F(x,y,z) = z^3 + 3xz + y^2$ pri čemu se u desnoj strani varijable $x, \ y, \ z$ tretiraju kao nezavisne.

Da bi izračunali $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$ iz

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{z^2 + x}$$

očito je potrebno izračunati $z(0,1)$. Uvrštavanjem u implicitnu jednadžbu $z^3 + 3xz + y^2 = 0$ dobije se

$$(z(0,1))^3 + 3 \cdot 0 \cdot z(0,1) + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (z(0,1))^3 = -1 \Leftrightarrow z(0,1) = -1.$$

Konačno

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{-1}{(-1)^2 + 0} = 1.$$

Za dodatno vježbanje: Odredite $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,1)$ te $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,1)$. □

MATEMATIKA II: 5. test Grupa **B3** 21.06. 2006.

1. Odredite vrijednost svih parcijalnih derivacija trećeg reda u $O(0,0)$ funkcije $z(x,y) = xy^2 + e^{-2x}$.
Rješenje: Trebamo naći

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - 2e^{-2x}, \; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4e^{-2x}, \; \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -8e^{-2x}, \; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y, \; \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy, \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x, \; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

Sada je

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(0,0) = -8, \; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}(0,0) = 0, \; \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}(0,0) = 2, \; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(0,0) = 0.$$

□

2. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$ ako je $z = z(x,y)$ zadano implicite sa $z^3 + 3xz + y^2 = 0$.
Rješenje: Derivirajući izraz $z^3 + 3xz + y^2 = 0$ parcijalno po varijabli y i uvažavajući da je $z = z(x,y)$ dobije se:

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 3x \frac{\partial z}{\partial y} + 2y = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2 + 3x}.$$

Isti izraz bi naravno dobili da smo koristili formulu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

gdje je $F(x,y,z) = z^3 + 3xz + y^2$ pri čemu se u desnoj strani varijable $x, \; y, \; z$ tretiraju kao nezavisne.

Da bi izračunali $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$ iz

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2 + 3x}$$

očito je potrebno izračunati $z(0,1)$. Uvrštavanjem u implicitnu jednadžbu $z^3 + 3xz + y^2 = 0$ dobije se

$$(z(0,1))^3 + 3 \cdot 0 \cdot z(0,1) + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (z(0,1))^3 = -1 \Leftrightarrow z(0,1) = -1.$$

Konačno

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -\frac{2}{3(-1)^2 + 0} = -\frac{2}{3}.$$

Za dodatno vježbanje: Odredite $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,1)$ te $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$. □

MATEMATIKA II: 5. test Grupa **A4** 23.06. 2006.

1. Odredite $\min F(a,b)$ (najmanju vrijednost) ako je
   $F(a,b) = b^2 + (1-a-b)^2$.
   Rješenje: Odredimo prvo stacionarne točke funkcije F. Kako je

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2(1-a-b),\ \ \frac{\partial F}{\partial b} = 2b - 2(1-a-b)$$

to se stacionarne točke dobiju rješavanjem sustava

$$-2(1-a-b) = 0,\ \ 2b - 2(1-a-b) = 0.$$

Lako se dobije $a = 1,\ b = 0$.
Dovoljni uvjeti: Odredimo vrijednost Hessiana u stacionarnoj točki $(1,0)$. Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = 2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 4,$$

to je i

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(1,0) = 2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a}(1,0) = 2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(1,0) = 4,$$

što daje

$$D(1,0) = 2 \cdot 4 - 2^2 = 4 > 0,$$

pa je $(1,0)$ točka lokalnog ekstrema, a kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(1,0) = 2 > 0$ radi se o lokalnom minimumu. Kako je to jedini lokalni ekstrem radi se o točki minimuma funkcije F, pa je

$$\min F = F(1,0) = 0.$$

□

2. Izračunajte $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)$ ako su $u = u(x,y)$ i $v = v(x,y)$ zadane implicite sa
   $x^2 = 2u + 3v,\ y = u + v$.
   Rješenje: Derivirajući svaku od jednadžbi $x^2 = 2u + 3v,\ y = u + v$ parcijalno po varijabli x te uvažavajući da su x i y nezavisne varijable a $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ dobije se (linearan sustav po $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$):

$$2x = 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Očito je $\frac{\partial u}{\partial x} = -2x$ što daje

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = -2.$$

Za dodatno vježbanje: Izračunajte $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)$, te $\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)$ ako su funkcije $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ zadane implicite sa $x^2 = 2u + 3v$, $y = u + v^2$. $\square$

MATEMATIKA II: 5. test Grupa **B4** 23.06. 2006.

1. Odredite $\min F(a,b)$ (najmanju vrijednost) ako je
   $F(a,b) = a^2 + (1-a-b)^2$.
   Rješenje: Odredimo prvo stacionarne točke funkcije F. Kako je

   $$\frac{\partial F}{\partial a} = 2a - 2(1-a-b), \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -2(1-a-b)$$

   to se stacionarne točke dobiju rješavanjem sustava

   $$2a - 2(1-a-b) = 0, \quad -2(1-a-b) = 0.$$

   Lako se dobije $a = 0$, $b = 1$.
   Dovoljni uvjeti: Odredimo vrijednost Hessiana u stacionarnoj točki $(1,0)$. Kako je

   $$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 4, \ \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = 2, \ \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 2,$$

   to je i

   $$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(1,0) = 4, \ \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a}(1,0) = 2, \ \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(1,0) = 2,$$

   što daje

   $$D(1,0) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4 > 0,$$

   pa je $(1,0)$ točka lokalnog ekstrema, a kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(1,0) = 4 > 0$ radi se o lokalnom minimumu. Kako je to jedini lokalni ekstrem radi se o točki minimuma funkcije F, pa je

   $$\min F = F(1,0) = 0.$$

   $\square$

2. Izračunajte $\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)$ ako su $u = u(x,y)$ i $v = v(x,y)$ zadane implicite sa
   $x^2 = 3u + 2v$, $y = u + v$.
   Rješenje: Derivirajući svaku od jednadžbi $x^2 = 3u + 2v$, $y = u + v$

parcijalno po varijabli x te uvažavajući da su x i y nezavisne varijable a $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ dobije se (linearan sustav po $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$):

$$2x = 3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Očito je $\frac{\partial v}{\partial x} = -2x$ što daje

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = -2.$$

Za dodatno vježbanje: Izračunajte $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0)$, te $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 0)$ ako su funkcije $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ zadane implicite sa $x^2 = 3u + 2v$, $y = u^2 + v$. $\square$