# 1 Neodređeni integral

1. Odredite $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

2. Odredite $\int x\sin^2 x\, dx$.

3. Odredite $\int \frac{3x+2}{3+2x+x^2}dx$.

4. Odredite $\int x\cos^2 x\, dx$.

5. Odredite $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x + 5x}{1+x^2}dx$.

6. Izračunajte $\int \frac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}dx$.

7. Odredite $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x + \sin x}{\cos^2 x}dx$.

8. Odredite $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\cos^2\sqrt{x}}$.

9. Odredite $\displaystyle\int \frac{3+2\ln^2 x}{x\ln^3 x}\,dx$.

# 2 Određeni integral

1. Pokažite da je $F(x) = \frac{1}{7}\ln\frac{2x-3}{x+2} + \ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{2x^2+x-6}$. Izračunajte
a) $\int_2^4 \frac{dx}{2x^2+x-6}$ b) $\int_2^4 f'(x)dx$.

2. Neka je $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+1}; & x \in [0,3] \\ 0; & x \notin [0,3] \end{cases}$. Izračunajte $F(-1)$ i $F(7)$ ako je $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

3. Neka je $f(x) = \begin{cases} x-2 & ; x \in [0,4] \\ 0 & ; x \notin [0,4] \end{cases}$. Izračunajte $\int_{-7}^5 f(x)dx$. Ako je $F(x) = \int_2^x f(t)dt$ izračunajte a) $F(-7)$, $F(0)$, $F(3)$, $F(5)$ b) $\int_{-7}^5 F(x)dx$.

4. Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x \in [0,2] \\ 0 & ; x \notin [0,2] \end{cases}$. a) Izračunajte $\int_{-2}^4 f(x)dx$.
b) Ako je $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, izračunajte $F(-2)$, $F(0)$, $F(1)$, $F(4)$, $F'(1)$, $F'(4)$.

5. Pokažite da je funkcija $F(x) = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{e^{3x}-1} + \operatorname{arctg} 2$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{3x}-1}}$. Izračunajte a) $\int_{1/3}^1 \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$ b) $\int_{1/3}^1 \frac{df(x)}{dx}dx$ c) $\frac{d}{dx}\left(\int_{1/3}^x F(t)dt\right)$ za $x=1$.

6. Neka je $f(x) = \begin{cases} 4-x & ; x \in [1,4] \\ 0 & x \notin [1,4] \end{cases}$. Ako je $F(x) = \int_2^x f(t)dt$ a) Izračunajte $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(10)$ b) $\int_{-1}^5 F(x)dx$.

7. Pokažite da je funkcija $F(x)=x-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+\ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x)=\frac{1}{1+e^{2x}}$. Izračunajte a) $\int_0^2 \frac{dx}{1+e^{2x}}$. b) $\int_0^2 df(x)$ c) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^2 F(x)dx\right)$ d) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x F(t)dt\right)$ za $x=2$.

8. Neka je $f(x)=\begin{cases} 8-2x & ; x\in[2,4] \\ 0 & ; x\notin[2,4] \end{cases}$. Ako je $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, izračunajte $F(3)$, $F(10)$, $F'(3)$, $F'(10)$.

9. Pomoću teorema srednje vrijednosti odredite donju i gornju ogradu (među) integrala $\int_{-3}^{1}\ln\left(x^2+4x+6\right)dx$.

10. Odredite prosječnu vrijednost (aritmetičku sredinu) $\mu$ funkcije $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5x+1}}$ na intervalu $[0,3]$, te odredite $c\in[0,3]$ za koji je $f(c)=\mu$.

11. Neka je $f(x)=\begin{cases} 10-2x & ; x\in[3,5] \\ 0 & ; x\notin[3,5] \end{cases}$. Ako je $F(x)=\int_2^x f(t)dt$, izračunajte $F(4)$, $F(12)$, $F'(4)$, $F'(12)$.

12. Izračunajte $\int_{-\pi}^{\pi}(x^4+3x)\sin(2x)\,dx$.

13. Izračunajte $\int_{-2\pi}^{2\pi}(2x+x^4)\sin(3x)\,dx$.

14. Izračunajte sljedeće integrale a) $\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{5x-7}$ b) $\int_{-3}^{-1}\frac{xdx}{5x-7}$ c) $\int_{-3}^{-1}\frac{3xdx}{5x^2+7}$ d) $\int_{-3}^{-1}\frac{3xdx}{x^2-5x+6}$.

15. Pokažite da funkcija $F(t)=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\sqrt{1+t^4}\right)+\operatorname{arctg}3$ zadovoljava jednakost $F'(t)=f(t)$, pri čemu je $f(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}$. Izračunajte a) $\int_{-1}^{2}f'(t)dt$ b) $\int_{-1}^{2}f(t)dt$ c) $\int_{-1}^{2}\frac{df(t)}{dt}dt$ d) $\frac{d}{dt}\int_{-1}^{t}F(x)dx$ za $t=3$ e) $\frac{d}{dt}\int_{-1}^{3}F(t)dt$.

16. Zadana je funkcija $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} & ; x\in[0,3] \\ 0 & ; x\notin[0,3] \end{cases}$. Izračunajte $\int_{-2}^{5}f(x)dx$. Ako je $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ izračunajte a) $F(-2)$, $F(2)$, $F(5)$ b) $\max F$, $\min F$ c) $F'(-2)$, $F'(2)$, $F'(5)$.

17. Izračunajte a) $\int_0^{\pi}\cos^4 x\sin x dx$ b) $\int_0^{\pi}\cos^4 x dx$.

18. Pokažite da je funkcija $F(x)=x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2+\ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x)=\frac{x^2}{x^2-2}$. Izračunajte a) $\int_0^1 dF(x)$ b) $\int_0^1 f(x)dx$ c) $\int_0^1 f'(x)dx$ d) $\frac{d}{dx}\int_0^1 F(x)dx$ e) $\frac{d}{dx}\int_0^x F(t)dt$ za $x=1$.

19. Neka je $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{(2x+1)^2} & , x\in[0,3] \\ 0 & , x\notin[0,3] \end{cases}$. a) Izračunajte površinu područja između krivulje $y=f(x)$ i $x-$osi. b) Izračunajte $\int_{-4}^{4}f(x)dx$. Ako je $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ izračunajte c) $F(-4)$ d) $F(0)$ e) $F(2)$ f) $F(4)$.

20. Provjerite da je $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+\operatorname{arctg}(x-1)+\ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x)=\frac{x}{x^2-2x+2}$. Izračunajte a) $\int_0^2 f(x)dx$ b) $\int_0^2 f'(x)dx$ c) $\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^x F(t)dt\right)$ za $x=2$ d) $\int_0^x \frac{d^2F(t)}{dt^2}dt$ za $x=2$.

21. Pokažite da je $F(x) = \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{17}} + \arcsin 0.5$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x-x^2}}$, te izračunajte $\int_0^1 f(x)dx$.

22. Izračunajte sljedeće određene integrale a) $\int_0^3 \frac{x\,dx}{2x+1}$ b) $\int_0^3 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2 dx$ c) $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}}$.

23. Pomoću teorema srednje vrijednosti odredite donju i gornju ogradu (među) integrala $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

24. Pokažite da je funkcija $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + \ln 5$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$. Izračunajte a) $\int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ b) $\int_1^{e^3} df(x)$ c) $\frac{d}{dx}\left(\int_1^{e^3} f(x)dx\right)$ d) $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x dF(t)\right)$ za $x = e^3$.

25. Izračunajte $\int_0^2 x\sqrt{4+x^2}\,dx$ koristeći a) pogodnu trigonometrijsku supstituciju b) proceduru za rješavanje binomnog integrala.

26. Odredite srednju vrijednost $\mu$ funkcije $f(x) = \frac{x}{x+3}$ na intervalu $[0,3]$. Odredite $c \in [0,3]$ tako da je $f(c) = \mu$. Prikažite dobivene podatke slikom!

27. Ako je $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} e^2$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, odredite $f(x)$. Izračunajte a) $\int_0^1 F'(x)dx$ b) $\int_0^1 f(x)dx$ c) $\int_0^1 \frac{d^2F(x)}{dx^2}dx$ d) $\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^x F(t)dt\right)$ za $x = 1$.

28. Izračunajte $I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}$, $k = 1, 2, 3$, te ih poredajte po veličini (počevši od najmanjeg).

# 3 Primjena određenog integrala

1. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y^2 = 6x$, $y^2 = 2(x+4)$.

2. Koristeći polarne koordinate izračunajte opseg lika zadanog nejednadžbama $3 \leq y \leq \sqrt{18-x^2}$.

3. Područje u ravnini zadano je s $1/4 \leq e^{-4x} \leq y \leq 4$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog područja oko pravca a) $x = -1$ b) $x = 0$.

4. Izračunajte površinu lika u ravnini određenog krivuljama $y = x^2$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = x$ koristeći a) Kartezijeve koordinate b) polarne koordinate.

5. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y = 2x$ i $y = x^3 - 7x$.

6. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y = 1-x$, $y = (x^2-1)(x+3)$.

7. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y = x^2 - 4$ i $y = x(2-x)$.

8. Izračunajte a) opseg b) površinu lika u ravnini određenog krivuljama $y = e^{-x}$, $y = 2x+1$, $y = 3$.

9. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y = x\sin(\pi x)$, $y = 0$ između pravaca $x = 0$ i $x = 2$.

10. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja zadanog s $x^2 - 2x \leq y \leq 3$ oko a) $x = 0$ b) $y = 0$ c) $y = -1$.

11. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y = x/\sqrt{3}$ koristeći a) Kartezijeve koordinate b) polarne koordinate.

12. Koristeći integralni račun izračunajte površinu lika odrađenog nejednadžbama $0 \leq y \leq x\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x^2 + y^2 \leq 2x$.

13. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja omeđenog krivuljama $xy = 1$, $2x + y = 3$ oko pravca a) $x = 0$ b) $y = -2$.

14. Izračunajte duljinu puta koji prevali čestica čije je kretanje zadano s $x = \frac{1}{1+t^2}$, $y = \frac{2-t^2}{1+t^2}$ od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = 2$.

15. Lik u ravnini određen je nejednadžbama $x^2 + y^2 \leq 4x$, $x \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x$. a) Koristeći Kartezijeve koordinate odredite integralni izraz kojim izračunavamo površinu tog lika (ne trebate izračunavati integrale). b) Izračunajte površinu tog lika (ne nužno koristeći izraz pod a)).

16. Lik u ravnini zadan je krivuljama $y^2 = 2x$, $y = x^2$, $y = 8x^2$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko pravca: a) $x = -1$, b) $y = 5$.

17. Lik u ravnini zadan je krivuljama $y = e^{-x}$, $y = 1-e^{-x}$, $x = 0$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko a) $x = 0$ b) $y = -1$.

18. Koristeći polarne koordinate izračunajte površinu lika određenog s $x^2 + y^2 \leq 5$, $-x \leq y \leq x\sqrt{3}$.

19. Koristeći polarne koordinate izračunajte površinu lika određenog s $-x\sqrt{3} \leq y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq 7$.

20. Izračunajte površinu lika određenog nejednadžbama $x \leq y \leq x\sqrt{3}$, $xy \leq 2$, koristeći a) Kartezijeve koordinate b) polarne koordinate.

21. Izračunajte $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2}dx$. Tim integralom izračunavamo a) Površinu kojeg lika? b) Duljinu luka koje krivulje? c) Volumen kojeg rotacijskog tijela?

22. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $x^2 \leq y \leq 4$ oko pravca $y = -1$.

23. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y = xe^{3x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

24. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom lika određeno krivuljama $y = 2e^{-x}$, $y = 2e^{-2x}$, $y = 1$ oko pravca a) $y = 1$ b) $x = 0$.

25. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom lika određenog krivuljama $y = e^{-x}$, $y = e$, $x = 0$ oko pravca a) $x = -2$ b) $y = 3$.

26. Lik u ravnini određen je krivuljama $x^2 + y^2 = 6y$, $y = x\sqrt{3}$, $y = -x$. Koristeći integralni račun izračunajte mu a) opseg b) površinu.

27. Lik u ravnini zadan je nejednadžbama $-3 \leq y \leq 2x - x^2$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko pravca a) $x = -5$ b) $y = -4$.

28. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $x^2 + y^2 \leq 6x$ oko pravca a) $x = 0$ b) $y = 0$.

29. Lik u ravnini određen je krivuljama $y = e^{-x} - 1$, $y = 2\,(e^{-x} - 1)$, $2y = -1$. Izračunajte mu a) opseg b) površinu.

30. Lik u ravnini određen je krivuljama $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x^2 + y^2 = 8y$. Izračunajte površinu toga lika koristeći a) Kartezijeve koordinate b) polarne koordinate.

31. Pomoću određenog integrala izračunajte površinu trapeza zadanog vrhovima $A(0,3)$, $B(0,6)$, $C(\sqrt{3},3)$, $D(2\sqrt{3},6)$ a) koristeći Kartezijeve koordinate b) koristeći polarne koordinate.

32. Izračunajte $\int_{-2}^{3} \frac{x\,dx}{(x+3)(x-4)}$. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y = \frac{x}{(x+3)(x-4)}$, $y = 0$ između pravaca $x = -2$ i $x = 3$.

33. Područje omeđeno krivuljama $y = e^{-2x}$, $y = e^{2x}$, $x = 2$ rotira oko pravca $x = -3$. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela. Izračunajte površinu lika nastalog presjekom tog tijela i ravnine okomite na os ordinata u $y = 3$.

34. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom lika $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ oko pravca $x = 0$. Izračunajte površinu lika nastalog presjekom tog tijela s ravninom okomitom na os ordinata u $y = 1/2$.

35. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja zadanog krivuljama $y = \frac{1}{x+2}$, $y = 1$, $x = 3$ oko pravca a) $x = -3$ b) $y = 3$.

36. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $\frac{x+1}{x+3} \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 2$ oko pravca a) $x = -3$ b) $y = 1$.

37. Lik u ravnini određen je krivuljama $y = e^{-3x}$, $y = e^{x}$, $y = 5$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko pravca a) $x = 0$ b) $y = -1$.

# 4 Analitička geometrija

1. Pokažite da su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 7\vec{k}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ linearno zavisni i prikažite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

2. Odredite kanonsku jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $p \ldots \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{-1}$ i okomita je na ravninu $\pi_1 \ldots 2x - 4y + 3z + 8 = 0$.

3. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ za koji su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 7\vec{k}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \lambda\vec{k}$ komplanarni, tj. linearno zavisni. Za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ je volumen paralelopipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednak 10?

4. Odredite jednadžbu ravnine $\pi$ koja sadrži točku $A(2,1,1)$ i pravac $p \ldots \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.

5. Provjerite jesu li točke $A(1,0,-2)$, $B(4,2,-3)$, $C(-2,-2,-1)$ kolinearne. Ako jesu, odredite kanonsku jednadžbu pravca na kojem one leže.

6. Neka je $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+9\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}-14\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{d}=3\vec{a}+2\vec{b}$. a) Odredite kut između vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$, b) Odredite skalarnu projekciju vektora $\vec{d}$ na vektor $\vec{c}$, c) Odredite vektorsku projekciju vektora $\vec{d}$ na vektor $\vec{c}$.

7. Neka je $\Delta ABC$ trokut s vrhovima $A(2,-1,5)$, $B(6,-1,2)$ i $C(4,-3,6)$. Odredite kut trokuta kod vrha $A$, tj. $\angle BAC$. Koliko iznosi površina danog trokuta?

8. Odredite kanonsku jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $p_1 \ldots \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$ i paralelna je s pravcem $p_2 \ldots \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-1}{4}$.

9. Odredite točku $D$ koja s točkama $A(5,-2,2)$, $B(3,4,-1)$ i $C(1,6,-2)$ čini paralelogram. Odredite kuteve danog paralelograma. Koliko iznosi površina danog paralelograma?

10. Odredite jednadžbu ravnine $\pi$ koja je okomita na ravninu $\pi_1 \ldots 2x-3y+5=0$ te sadrži pravac $p \ldots \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-3}$.

11. Provjerite jesu li točke $A(-2,1,0)$, $B(-1,4,-2)$, $C(-3,-2,2)$ kolinearne. Ako jesu, odredite kanonsku jednadžbu pravca na kojem one leže.

12. Odredite jednadžbu pravca $p$ koji je paralelan s ravninama $\pi_1 \ldots 2x-3y-2z+6=0$ i $\pi_2 \ldots -x+5z+3=0$ i koji sadrži točku $A(2,3,-2)$.

13. Odredite jednadžbu ravnine $\pi$ koja sadrži točke $A(1,2,3)$ i $B(2,0,5)$ i paralelna je s pravcem $p \ldots \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{3}$.

14. Odredite jednadžbu pravca $p=\pi_1\cap\pi_2$ ako je $\pi_1 \ldots 3x+2y+2z=0$ i $\pi_2 \ldots 2x-3y-2z+4=0$.

15. Provjerite jesu li točke $A(1,2,4)$, $B(-2,-4,-8)$, $C(3,2,5)$ i $D(1,0,-\frac{1}{6})$ komplanarne. Ako jesu, odredite jednadžbu ravnine u kojoj leže.

# 5 Funkcije dviju i više varijabli

1. Transformirajte parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $3\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$ u nove varijable $u$ i $v$, ako je $u=x+3y$, $v=3x+4y$.

2. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na eliptički paraboloid $z=3x^2+5y^2$ paralelne ravnini $\pi \ldots 3x-5y+2z+7=0$.

3. Neka je $z=\sqrt{1+3x+2y}$. Po definiciji parcijalne derivacije izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)$.

4. Ploha $\sum$ zadana je jednadžbom $z=\sqrt{-\ln\left(x+\frac{y}{3}\right)}$. a) Odredite udaljenost točke $T_0(1/3,2,z_0)\in\sum$ od ishodišta. b) Na plohi $\sum$ odredite točku najbližu ishodištu.

5. Neka je $z = \frac{2x-y}{x+3y}$. a) Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$. b) Izračunajte $|\Delta z(1,0) - dz(1,0)|$ za $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = 0.3$. c) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = \frac{2x-y}{x+3y}$ paralelnu s ravninom $\pi \ldots 3x + 2y + z + 4 = 0$.

6. Prikažite broj 2010 kao zbroj tri broja čiji je produkt minimalan. Navedite jedan takav rastav koji je različit od dobivenog optimalnog i uvjerite se u vašu tvrdnju.

7. Transformirajte parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$ u nove nezavisne koordinate $u$ i $v$ zadane implicite s $x = v \cos u$, $y = v \sin u$.

8. Neka je $z = \ln\left(2x + y^3\right)$. a) Provjerite jednakost iz Schwarzovog teorema. b) Odredite vrijednosti svih parcijalnih derivacija drugog reda funkkcije $z$ u $T_0(3,1)$. c) Izračunajte $\left|\Delta z(3,1) - dz(3,1) - \frac{1}{2!}d^2z(3,1)\right|$ za $\Delta x = 0.3$, $\Delta y = -0.4$.

9. Zadana je funkcija $z = \frac{2x-y}{x+3y}$. a) Po definiciji parcijalne derivacije izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$ b) Tabličnim deriviranjem izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$ c) Izračunajte $|\Delta z(0,1) - dz(0,1)|$ za $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = 0.3$.

10. Odredite najveću i najmanju vrijednost koju može poprimiti funkcija $z = z(x,y)$ zadana implicite s $z^2 + 2z + x^2 + y^2 + 4y = 11$.

11. Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x,y)$ zadane implicite s $y^2 - 3y - xy + x^2 + z^2 + 2z = 9$.

12. Zadana je ploha $\sum \ldots z = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3xy}$ i točka $A(3,1,0)$. a) Izračunajte udaljenost točke $B(3,1,z_0) \in \sum$ do točke $A$. b) Na plohi $\sum$ odredite točku $T_0$ koja je najbliža točki $A$. c) Pokažite da je vektor $\vec{AT_0}$ okomit na plohu $\sum$ u $T_0$.

13. Odredite točke na plohi zadanoj s $z = 8x^4 - \frac{1}{4}y^4 - 8x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4xy$ u kojima je tangencijalna ravnina na tu plohu paralelna s $xy-$ravninom. Odredite jednadžbe tih ravnina. Koja od tih točaka je lokalni ekstrem zadane funkcije $z = z(x,y)$?

14. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\ln\left(-1.8 + \sqrt[3]{27.3}\right)$. Izračunajte razliku između prave vrijednosti (izračunate pomoću kalkulatora) i dobivene približne vrijednosti.

15. a) Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\cos 25^\circ \sqrt[3]{25}$. b) Koristeći kvadratnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\cos 25^\circ \sqrt[3]{25}$. c) Koja je aproksimacija točnija?

16. Izrađujemo ormar volumena $1m^3$ bez prednje i stražnje strane, s dvije police i jednom pregradom. Odredite dimenzije ormara ako želimo najmanji utrošak materijala.

17. Izrađujemo ormar za knjige volumena $2\mathrm{m}^3$ s tri horizontalne police bez prednje strane. Odredite dimenzije ormara ako zelimo minimalan utrošak materijala.

18. Zadana je funkcija $f(x,y) = x^{y+1}$. a) Po definiciji parcijalne derivacije odredite $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ b) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$. b) Tabličnim deriviranjem odredite $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ b) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$. c) Izračunajte $|\Delta f(1,2) - df(1,2)|$ za $\Delta x = -0.3$, $\Delta y = 0.4$.

19. Zadana je ploha $\sum \ldots z = 2x^2 - 2y^2$ i točke $A(1,3,0)$, $B(-2,2,0)$. a) Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točke $A$, $B$ i točku $C(1,0,z) \in \sum$. b) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $\sum$ koja sadrži točke $A$ i $B$.

20. Ako je $z = y^{2x+3y}$ izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$.

21. Ako je $z = x^{3x+2y}$ izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)$.

22. Po definiciji parcijalne derivacije izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)$, ako je $z(x,y) = \frac{x-2y}{x+2y}$. Je li funkcija $z(x,-2)$ rastuća ili padajuća za $x_0 = 1$?

23. Neka je $z(x,y) = x^{3y}$. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,1)$. Provjerite jednakost iz Schwarzovog teorema za funkciju $z$.

24. Po definiciji parcijalne derivacije izračunajte $\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$ ako je $z(x,y) = xy^2 + \ln(3x)$.

25. Izračunajte na četiri decimalna mjesta $|\Delta f(3,2) - df(3,2)|$ ako je $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$ za $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = 0.3$.

26. Produkt tri broja je 2744. Odredite te brojeve ako im je zbroj minimalan.

27. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt{5 + \sqrt[3]{25}}$.

28. Produkt tri broja je 1728. Odredite te brojeve ako im je zbroj minimalan.

29. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt[3]{5 + \sqrt{5}}$.

30. Neka tvornica ambalaže izrađuje kutije volumena $1\text{m}^3$ bez gornjeg poklopca sa 3 poprečne i 4 uzdužne pregrade. Odredite dimenzije te kutije da utrošak materijala bude minimalan.

31. Neka je $z(x,y) = \frac{2x-y}{3y+x}$. a) Po definiciji parcijalne derivacije izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$. b) Izračunajte $|\Delta z(2,1) - dz(2,1)|$ za $\Delta x = -0.4$, $\Delta y = 0.3$.

32. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost izraza $\sqrt{\sqrt{50} + \sqrt[3]{-25}}$. Ako je $v$ vrijednost od $\sqrt{\sqrt{50} + \sqrt[3]{-25}}$, a $Pv$ dobivena približna vrijednost izračunajte $|v - Pv|$.

33. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt{7.3 + \sqrt[3]{7.8}}$.

34. Koristeći linearnu aproksimaciju odredite približnu vrijednost od $z(0.8, 2.3)$ ako je $z = z(x,y)$ zadana implicite s $z^3 + 2z + xy + y^2 = 6$.

35. Odredite dirališnu točku tangencijalne ravnine plohe $z = x^2 + 3xy$ paralelne s ravninom $2x - 3y + z + 10 = 0$.

36. a) Odredite jednadžbu ravnine $\pi$ koja sadrži točke $A(1,1,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,-1)$. b) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine plohe $z=\ln(y+e^x)$ koja je paralelna s ravninom $\pi$.

37. Zadana je ploha $\Sigma \ldots z=\sqrt{-\ln(2x+3y)}$. Ako točka $A(1/4,1/6,z_0)$ leži na plohi $\Sigma$ izračunajte koliko je točka $A$ udaljena od ishodišta. Na plohi $\Sigma$ odredite točku najbližu ishodištu koordinatnog sustava.

38. Izračunajte $z(2,0)$ ako je funkcija $z=z(x,y)$ zadana implicite s $xz+yz^3=1$. Provjerite jednakost iz Schwarzovog teorem za funkciju $z=z(x,y)$.

39. Neka je $z=x^{2y}$. a) Izračunajte sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije $z$ u točki $T(2,3)$. b) Izračunajte $dz(2,3)$ za $\Delta x=-0.5$, $\Delta y=0.3$. c) Izračunajte $d^2z(2,3)$ za $\Delta x=-0.5$, $\Delta y=0.3$. d) Izračunajte $\left|\Delta z(2,3)-dz(2,3)-\frac{1}{2!}d^2(2,3)\right|$ za $\Delta x=-0.5$, $\Delta y=0.3$.

40. Izrađujemo kartonske kutije bez gornjeg poklopca volumena $50\text{dm}^3$ s tri uzdužne (paralelne s prednjom stranom kutije) pregrade i četiri poprečne (paralelne s bočnom stranom kutije) pregrade. Odredite omjer dužine, širine i visine kutije u koju je utrošeno najmanje materijala.

41. Zadana je ploha $S \ldots z=2xy$. a) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $S$ u točki $T_0(0,0,z_0)\in S$. b) Na plohi $S$ odredite točku najbližu točki $T_1(0,0,5)$. c) Odredite jednadžbu normale na plohu $S$ spuštene iz točke $T_1$.

42. a) Korištenjem kalkulatora izračunajte $\ln(\sqrt[3]{70}-4)$. b) Korištenjem linearne aproksimacije izračunajte približnu vrijednost od $\ln(\sqrt[3]{70}-4)$. c) Izračunajte koliko ste pogriješili u toj aproksimaciji?

43. Ploha $S$ zadana je jednadžbom $z=\frac{x-y}{x+2y}$. a) Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$. b) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $S$ koja prolazi točkom $A(1,1,z_0)\in S$. c) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $S$ koja je paralelna s ravninom $\pi \ldots 2x+2y+z=4$.

44. Ploha je zadana s $z=e^{-2y}(x^2-3y^2)$. a) Odredite točke na toj plohi u kojima je tangencijalna ravnina okomita na $z-$os. b) U kojima od tih točaka ploha ima lokalni ekstrem?

45. Izrazite a) $\frac{\partial z}{\partial y}$ b) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ u novim varijablama $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ zadanim s $x=uv$, $y=3u+2v$.

# 6 Obične diferencijalne jednadžbe

1. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $y'=-10^2$ b) $y''=-10^2x$ c) $y''=-10^2y$ koje prolaze ishodištem koordinatnog sustava s koeficijentom smjera tangente $k=-10^2$.

2. Gomperzov model rasta neke populacije vinskih mušica dan je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dP}{dt}=10^{-2}P\left(10-\sqrt[5]{P}\right)$ ($P=P(t)$ broj vinskih mušica te populacije u trenutku $t$; $t$ u danima). a) Odredite broj vinskih mušica nakon 4 dana ako su na početku promatranja bile 32 vinske mušice. b) Koji broj ta populacija vinskih mušica ne može premašiti?

3. a) Postoji li funkcija $z = z(x,y)$ tako da je $dz = (\sqrt{x} - 2y)\,dx - xdy$. b) Odredite integralnu krivulju diferencijalne jednadžbe $(\sqrt{x} - 2y)\,dx - xdy = 0$ koja prolazi točkom $T_0(1,1)$. c) Je li ta integralna krivulja za $x_0 = 1$ rastuća ili padajuća?

4. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $y'' = 2y'$ b) $y'' = 2y' + 3x$ koje prolaze točkom $A(0,1)$ s koeficijentom smjera tangente $k = 2$.

5. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $y' = x^6$ b) $y' = y^6$ c) $x^4 y' = y^4$ koje prolaze točkom $A(1,2)$.

6. Brzina $v = v(t)$ tijela u nekom mediju određena je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dv}{dt} = 3v - 3v^4$. Ako je brzina tog tijela na početku promatranja bila 20m/s, odredite koja će mu brzina biti nakon 3 sekunde.

7. Odredite integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $xy' + 3y = 3y^2$ koje prolaze točkom a) $A(1,1)$ b) $A(1,0)$ c) $A(1,2)$. Za svaku od tih integralnih krivulja izračunajte $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

8. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $y'' = 10^2$ b) $y'' = 10^2 y$ c) $y'' = 10^2 y'$ kojima je pravac $y = 2x + 1$ tangenta u točci $A(0,1)$. Za svaku od tih integralnih krivulja izračunajte $y(2)$.

9. Odredite sve funkcije $f$ za koje je $f''(x) = xe^{-3x}$. Od tih funkcija odredite onu za koju je $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$.

10. a) Provjerite postojanje funkcije $z = z(x,y)$ za koju je $dz = \frac{2y - x^2}{x^2}dx + \left(3 - \frac{2}{x}\right) dy$. b) Odredite integralnu krivulju diferencijalne jednadžbe $\frac{2y-x^2}{x^2}dx + \left(3 - \frac{2}{x}\right) dy = 0$ koja prolazi točkom $A(1,0)$. c) Može li se diferencijalna jednadžba $\frac{2y-x^2}{x^2}dx + \left(3 - \frac{2}{x}\right) dy = 0$ riješiti i na neki drugi način?

11. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $y'' = 0$ b) $y'' - e^{-3x} = 0$ c) $y'' - xe^{-3x} = 0$, kojima je pravac $y = 2x$ tangenta u ishodištu.

12. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $(x^2 - 4x)y' = 12y + 5y'$ b) $(x^2 - 4x)y' = 12y + 5y' + \left(\frac{x-5}{x+1}\right)^3$ koje prolaze točkom $T_0(0,25)$. Za svaku od tih krivulja izračunajte $y(4)$ i $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

13. Brzina tijela $v = v(t)$ ($t$ u sekundama) u nekom mediju određena je diferencijalnom jednadžbom $v' = -kv^6$ ($k$ realni parametar koji karakterizira otpor medija). a) Odredite opće rješenje te diferencijalne jednadžbe. b) Ako brzina tog tijela sa 20m/s padne na 10m/s za 2 sekunde, koju će brzinu to tijelo imati nakon 5 sekundi kretanja?

14. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $y'' = 3x$ b) $y'' = 3y'$ c) $y'' = 3y' + 3x$ kojima je os apscisa tangenta u ishodištu.

15. Prema jednom zakonu hlađenja temperatura tekućine $T = T(t)$ u prostoriji u kojoj je 18°C opisana je diferencijalnom jednadžbom $T' = -10^{-3}(T - 18)^3$ (vrijeme $t$ u minutama, temperatura $T$ u °C). Odredite za kolko će se minuta kava sa 100°C ohladiti na 40°C.

16. Broj oboljelih $P = P(t)$ ($t$ je dan u danima) od nekog virusa u gradu od $10^3$ stanovnika određen je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dP}{dt} = 0.2P\left(10^3 - P\right)$. Ako je na početku promatanja bilo 10 oboljelih, odredite nakon koliko dana će biti 90% oboljelih?

17. Zadana je diferencijalna jednadžba $xy' + 3y = 4$. a) Odredite njezino opće rješenje. b) Odredite ono rješenje koje prolazi točkom $A(1,2)$. c) Odredite ono rješenje koje za $x = 1$ ima koeficijent smjera tangente jednak 1.

18. Brzina nekog tijela u nekom mediju određena je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dv}{dt} = -kv^6$ ($v$ u m/s, $t$ u sekundama). Ako na početku kretanja tijelo ima brzinu od 20m/s, odredite $k$ tako da mu brzina padne na 1m/s za 5s.

19. a) Provjerite postojanje funkcije $z = z(x,y)$ takve da je $dz = \frac{y^3}{x}dx + 3y^2 \ln x dy$. b) Odredite tu funkciju. c) Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{y^3}{x}dx + 3y^2 \ln x dy = 0$ za koje je $y(e) = 1$.

20. Težina nekog čovjeka $T = T(t)$ ($T$ težina u kilogramima, $t$ vrijeme u godinama) određena je diferencijalnom jednadžbom $T' = \frac{1}{4}T - T^{3/4}$. Odredite koju će težinu taj čovjek imati nakon godinu dana ako je na početku promatranja imao 81kg.

21. Temperatura neke tekućine u prostoriji na $18°C$ odtređena je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dT}{dt} = 0.05(18 - T)$ ($T$ u stupnjevima Celzijusa, $t$ u satima). Odredite temperaturu tekućine nakon jednog sata ako je a) $T(0) = 100°C$, b) $T(0) = 0°C$.